力矩做功　刚体定轴转动的动能定理

1. 人在圆盘上走动时，人和圆盘构成的系统所受**外力**为：转轴对圆盘的作用力，方向：过转动点，垂直于转轴；系统所受**内力**为：人和圆盘之间的摩擦力，（**否则人无法在圆盘上随意走动**）

①由于系统**所受外力不为零，系统动量不守恒**；

②系统所受外力不为零，但外力方向经过转轴，**外力矩为零，系统角动量守恒**；　　　　本题选（**C**）

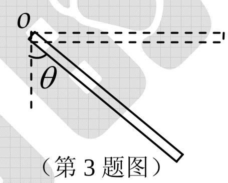
③系统所受外力经过转轴，**外力矩为零，外力做功为零**，但**非保守内力摩擦力做功，系统机械能不守恒**。

2. ①小球和细杆非弹性碰撞，该过程中有**非保守内力**做功，**系统机械能不守恒**；

②小球和细杆碰撞过程中，转轴对细杆会有作用力，系统在水平方向合外力不为零，**系统动量不守恒**；

③转轴对细杆的作用力经过转动点，该作用力的力矩为零；细杆在竖直位置处，小球和细杆的重力矩为零；所以系统的合外力矩为零，**系统的角动量守恒**。　　　　本题选（**C**）

3. 杆在下摆过程中，杆和地球构成的系统机械能守恒。



（第 3 题图）

取转动点 o 处重力势能为零，则杆在水平位置时机械能：$E_1 = E_{k1} + E_{p1} = 0 + 0 = 0$；

杆与竖直方向成 θ 角时机械能：$E_2 = E_{k2} + E_{p2} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}ml^2)\omega^2 - mg\dfrac{l}{2}\cos\theta$；

由机械能守恒：$E_1 = E_2 \ \Rightarrow \ 0 = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}ml^2)\omega^2 - mg\dfrac{l}{2}\cos\theta \ \Rightarrow \ \omega^2 = \dfrac{3g}{l}\cos\theta$

$\Rightarrow$ **杆的角速度**：$\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}\cos\theta}$.　　　　本题选（**B**）

4. 人和转动平台构成的系统外力矩为零，**系统角动量守恒**：$J\omega = J'\omega'$，

当人把哑铃收缩到胸前的过程中，系统的转动惯量变小，$J' < J$，$\Rightarrow$ 系统转动的角速度变大，$\omega' > \omega$；

$\Rightarrow$ 系统的转动动能变大，$E_k = \dfrac{1}{2}J'\omega'^2 = \dfrac{1}{2}J\omega\omega' > \dfrac{1}{2}J\omega^2$；又整个过程中系统势能不变，

所以**系统的机械能不守恒**。　　　　本题选（**C**）

5. （1）整个过程中合外力矩为零，角动量守恒：$J_0\omega_0 = (\dfrac{3}{4}J_0)\omega \ \Rightarrow$ **运动员的角速度**：$\omega = \dfrac{4}{3}\omega_0$；

（2）若运动员的转动惯量 J 不变，**外力矩做功**：$W = \dfrac{1}{2}J(\sqrt{2}\omega_0)^2 - \dfrac{1}{2}J\omega_0^2 = \dfrac{1}{2}J\omega_0^2$.

6. 由刚体转动动能定理，摩擦力所做的功等于刚体转动动能的增量：

$W = E_k - E_{k0} = 0 - \dfrac{1}{2}J\omega^2 = -\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}mR^2)\omega^2 = -\dfrac{1}{4}mR^2\omega^2$，**负号表示摩擦力做负功**。

7. 质点在整个过程中受到指向中心 o 的拉力作用，在有心力作用下相对中心 o 的角动量守恒：

$rmv_0 = \dfrac{r}{2}mv \ \Rightarrow \ rm(r\omega_0) = \dfrac{r}{2}mv \ \Rightarrow \ v = 2r\omega_0$，

由质点的动能定理，在此过程中拉力做功等于质点动能的增加。

拉力做功：$W = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}m(2r\omega_0)^2 - \dfrac{1}{2}m(r\omega_0)^2 = \dfrac{3}{2}mr^2\omega_0^2$.

8. 弹簧和杆以及地球构成的系统只有保守内力（重力和弹性力）做功，系统的机械能守恒。

若取转动点 o 处重力势能为零，弹簧原长时弹性势能为零。

在 $\theta = 0$ 的位置处，杆的动能：$E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2 = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}ml^2)\omega^2$，系统的势能：$E_p = mg\dfrac{l}{2} + 0$，（弹性势能为零）

$\Rightarrow$ 系统的机械能：$E = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3}ml^2)\omega^2 + mg\dfrac{l}{2}$；

在水平位置处，弹簧的形变量为：$x = \sqrt{h^2 + l^2} - (h - l) = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}\mathrm{m}$，设杆的角速度为 ω'，

杆的动能：$E_k' = \frac{1}{2}J\omega'^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega'^2$，系统的势能：$E_p' = 0 + \frac{1}{2}kx^2$，（重力势能为零）

$\Rightarrow$ 系统的机械能：$E' = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega'^2 + \frac{1}{2}kx^2$；

由系统的机械能守恒：$E = E' \Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2 + mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega'^2 + \frac{1}{2}kx^2$，

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega'^2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2 + mg\frac{l}{2} - \frac{1}{2}kx^2$，

又由杆在水平位置处的动能：$E_k' = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega'^2 \ge 0$，$\Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2 + mg\frac{l}{2} - \frac{1}{2}kx^2 \ge 0$，

$\Rightarrow$ 杆在 $\theta = 0$ 处的角速度：$\omega \ge 3.37\,\mathrm{rad/s}$，（取 $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$）；或 $\omega \ge 3.27\,\mathrm{rad/s}$.（取 $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$）

9. （1）在子弹射入杆的过程中，子弹和杆构成的系统动量不守恒，机械能不守恒，只有角动量守恒。设垂直纸面向外为转轴的正方向，则

射入前系统角动量：$L_0 = \frac{2}{3}lmv_0 + 0 = \frac{2}{3}lmv_0$；（初始棒静止不动，棒的角动量为零）

射入后子弹和杆在竖直位置处的角动量：$L = J\omega = [\frac{1}{3}ml^2 + m(\frac{2}{3}l)^2]\omega$；

由角动量守恒：$L_0 = L \Rightarrow \frac{2}{3}lmv_0 = [\frac{1}{3}ml^2 + m(\frac{2}{3}l)^2]\omega$，

$\Rightarrow$ 杆的角速度: $\omega = \frac{6v_0}{7l}$，子弹速度大小：$v = \frac{2}{3}l\omega = \frac{4}{7}v_0$；

（2）子弹射入后，子弹和杆以相同角速度 ω 从竖直位置上摆到最大角度 θ_m 位置，该过程中子弹和杆以及地球构成的系统机械能守恒。取转动点 o 处重力势能为零，则

在竖直位置：$E_1 = \frac{1}{2}J\omega^2 - mg\frac{l}{2} - mg\frac{2}{3}l$；

在最大角度 θ_m 位置：$E_2 = 0 - mg\frac{l}{2}\cos\theta_m - mg\frac{2}{3}l\cos\theta_m$；

由机械能守恒：$E_1 = E_2 \Rightarrow \cos\theta_m = 1 - \frac{12v_0^2}{49gl} \Rightarrow \theta_m = \arccos(1 - \frac{12v_0^2}{49gl})$.

